



- ۱) تشریحی ۱۳۹۶ دشوار
فاصله عرض از مبدأ دو خط موازی به معادله‌های $y - \sqrt{2}x = -1$ و $ax + by = 4$ برابر ۹ واحد است. a کدام می‌تواند باشد؟
بارم: ۱
- ۲) تشریحی ۱۳۹۶ متوسط
مقدار m چقدر باشد تا فاصله‌ی دو نقطه‌ی $A(m, 2)$ و $B(2m + 1, -m)$ برابر ۵ باشد؟
بارم: ۱
- ۳) تشریحی ۱۳۹۸ متوسط
دو ضلع مربعی روی دو خط $3x + 4y - k = 0$ و $6x + 8y = 50$ قرار دارند. اگر محیط مربع برابر $\frac{8k}{5}$ باشد، مقدار k^2 کدام است؟
بارم: ۱
- ۴) سوالات پرتکرار ۱۳۹۹ متوسط
نقاط $A(1, 0)$ و $C(-2, 3)$ دو رأس مقابل از مربعی هستند. مساحت مربع را بیابید.
بارم: ۱
- ۵) تشریحی ۱۳۹۹ متوسط
معادله‌ی خطی بنویسید که از نقطه‌ی $A(5, -3)$ گذشته و بر خط $x - 2y + 5 = 0$ عمود باشد.
بارم: ۱
- ۶) تشریحی ۱۳۹۹ متوسط
دو ضلع مربعی منطبق بر دو خط $2x - 2y = 3$ و $y = x + 1$ است. مساحت این مربع را به دست آورید.
بارم: ۱
- ۷) تشریحی ۱۳۹۸ متوسط
دایره به مرکز $O(3, 2)$ و مماس بر خط $4x - 3y + 9 = 0$ ، چند نقطه مشترک با محورهای مختصات دارد؟
بارم: ۱
- ۸) تشریحی ۱۳۹۶ دشوار
دو خط به معادله‌ی $my - x = -7$ و $m^3x + y = 2$ بر دو ضلع مربع منطبق‌اند. در این صورت برای m چند جواب وجود دارد؟
بارم: ۱
- ۹) تشریحی ۱۳۹۸ متوسط
نقطه $A(7, 6)$ رأس یک متوازی‌الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $2y - 3x = 11$ و $3y + 4x = 8$ می‌باشند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟
بارم: ۱
- ۱۰) تشریحی ۱۳۹۷ متوسط
دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات $2y + x = 6$ و $2x - y = 7$ و یک رأس آن نقطه $A(8, 5)$ است. مساحت این مستطیل کدام است؟
بارم: ۱
- ۱۱) تشریحی ۱۳۹۹ دشوار
نقطه‌ای بر روی خط $x + y = 1$ پیدا کنید که فاصله‌اش از خط $3x + 4y - 1 = 0$ برابر ۲ باشد.
بارم: ۱

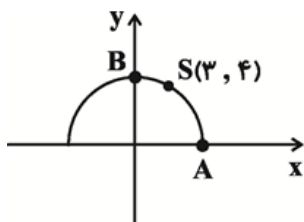
(۱۲)

تشریحی ۱۳۹۷

متوسط

نقطه $S(3, 4)$ روی نیم‌دایره شکل مقابل است. فاصله مبدأ از خط گذرا از نقاط A و B کدام است؟

بارم: ۱



(۱۳)

سوالات پرتکرار ۱۳۹۹

دشوار

خط d و نقطه M روی آن مفروض است. خطی رسم کنید که بر d عمود باشد و از M بگذرد (مراحل رسم را توضیح دهید). بارم: ۱

(۱۴)

تکاج ۱۳۸۴

متوسط

الف) نشان دهید که معادله خطی با طول از مبدأ a و عرض از مبدأ b که a, b هر دو مخالف صفر هستند به صورت $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ نوشته می‌شود. (این معادله فرم طول از مبدأ - عرض از مبدأ معادله y یک خط نام دارد).

ب) معادله خطی با طول از مبدأ 5 و عرض از مبدأ -6 را به فرم استاندارد بنویسید.

(۱۵)

تشریحی ۱۳۹۷

متوسط

فاصله نقطه $A(1, b)$ از دو خط $y = x$ و $y = -x$ یکسان است. b کدام است؟

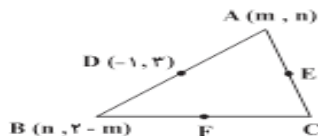
بارم: ۱

(۱۶)

تشریحی ۱۳۹۷

دشوار

در شکل زیر، نقاط D, E, F وسط‌های اضلاع مثلث ABC می‌باشند. با توجه به مقادیر مشخص شده، طول EF کدام است؟



بارم: ۱

(۱۷)

تشریحی ۱۳۹۶

دشوار

نقاط $A(4, 2)$ ، $B(1, -1)$ و $C(6, -1)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر H و M به ترتیب پای ارتفاع AH و میانه AM باشند، طول MH چقدر است؟

(۱۸)

تشریحی ۱۳۹۹

متوسط

نقاط $A(4, 2)$ ، $B(1, -1)$ و $C(6, -1)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر AH ، ارتفاع و AM ، میانه وارد بر ضلع BC باشند، طول MH چقدر است؟

(۱۹)

تشریحی ۱۳۹۶

متوسط

فاصله‌ی نقطه‌ای به طول $\sqrt{3}$ روی خط $\sqrt{3}x - 2y = 1$ ، از خطی با شیب -2 که از نقطه‌ی $(3, 2)$ عبور می‌کند، کدام است؟ بارم: ۱

(۲۰)

تشریحی ۱۳۹۸

متوسط

دو ضلع OA و OC از متوازی‌الاضلاع $OABC$ به ترتیب روی محور x ها و نیمساز ربع اول واقع‌اند و مختصات رأس B به صورت $(3, 2)$ است. مجموع طول و عرض رأس C کدام است؟ (O مبدأ مختصات است). بارم: ۱

(۲۱)

تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۸

دشوار

دایره‌ای به مرکز $O(2, -3)$ مفروض است. از نقطه‌ی $(8, -5)$ واقع بر محیط این دایره، خطی مماس بر دایره رسم می‌کنیم. معادله‌ی خط مماس و نقطه‌ای که خط مماس محور طول‌ها را قطع می‌کند، به دست آورید.

(۲۲)

تشریحی قلمچی ۱۳۹۷

متوسط

مثلث ABC را با مختصات رئوس $A(1,1)$, $B(1,4)$, $C(5,1)$ در اختیار داریم.

بارم: ۲

الف) مختصات نقطه M وسط پاره خط BC را به دست آورید.

ب) طول میانه وارد بر ضلع BC : (AM) را محاسبه نمایید.

(۲۳)

تشریحی قلمچی ۱۳۹۸

دشوار

دو نقطه $A(2,5)$ و $B(-1,2)$ روی یک دایره قرار دارند. اگر یک قطر آن روی خط $y = 3x - 1$ باشد، مختصات مرکز دایره کدام است؟

بارم: ۱

(۲۴)

تشریحی قلمچی ۱۳۹۶

متوسط

اگر نقطه $A(-1,2)$ رأس یک مربع و معادله یک ضلع مربع $4x + 3y = 12$ باشد، مساحت مربع را محاسبه کنید.

(۲۵)

تشریحی قلمچی ۱۳۹۸

متوسط

اگر نقطه $A(2,3)$ رأس یک مربع و معادله یک ضلع آن $3x - 4y = 9$ باشد، طول قطر مربع را محاسبه کنید.

بارم: ۱.۵

(۲۶)

تشریحی قلمچی ۱۳۹۷

متوسط

دو نقطه $A(m-1, 2)$ و $B(3, m+4)$ نسبت به خط $d: x + y = 5$ قرینه‌اند. m کدام است؟

بارم: ۱

(۲۷)

تشریحی قلمچی ۱۳۹۹

دشوار

در مثلث ABC با رئوس $A(1, 5)$, $B(-1, 0)$ و $C(3, -4)$ ، فاصله بین پای ارتفاع AH و نقطه میانی ضلع AB کدام است؟

بارم: ۱

(۲۸)

تشریحی قلمچی ۱۳۹۷

متوسط

دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات $2x - 2y = 3$ و $y = x + 1$ هستند، مساحت این مربع کدام است؟

بارم: ۱

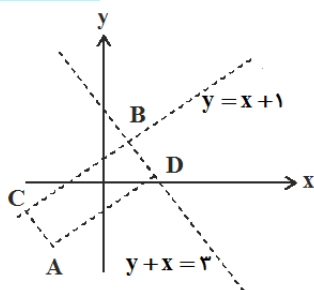
(۲۹)

تشریحی قلمچی ۱۳۹۸

متوسط

معادله دو ضلع یک متوازی‌الاضلاع برابر $BC: y - x = 1$ و $BD: y + x = 3$ است. اگر نقطه $A(-1, -2)$ یک رأس این متوازی‌الاضلاع باشد، طول قطر CD کدام است؟

بارم: ۱



(۳۰)

تشریحی قلمچی ۱۳۹۷

دشوار

نقاط $A(1, a)$, $B(b, 3)$ و $C(-2, 7)$ رئوس مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) می‌باشند. اگر ارتفاع وارد بر وتر روی خط $\frac{y}{x}$ با شیب $\frac{7}{3}$ باشد، حاصل $a + b$ کدام می‌تواند باشد؟

بارم: ۱

(۳۱)

تشریحی قلمچی ۱۳۹۶

متوسط

اگر α و β ریشه‌های $x^2 - 4x - 2 = 0$ معادله باشند، حاصل عبارت $\alpha^2 - 5\alpha - \beta$ کدام است؟

بارم: ۱

(۳۲)

تشریحی قلمچی ۱۳۹۷

دشوار

اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2 - (m+2)x + \frac{1}{\lambda} = 0$ باشند و بدانیم $\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} = 2$ است:

بارم: ۲

الف) مقدار m را محاسبه نمایید.

ب) توضیح دهید: «آیا m به دست آمده قابل قبول است یا خیر؟»

(۳۳)

تشریحی ۱۳۹۶

دشوار

اگر α و β ریشه‌های معادله $\frac{1}{\lambda} = 0$ باشد و $\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} = 2$ باشد، آنگاه m کدام است؟
بارم: ۱

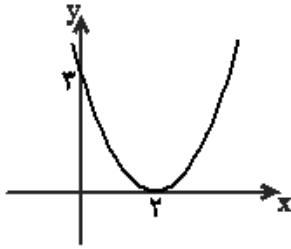
(۳۴)

سوالات پرتکرار ۱۳۹۹

دشوار

بارم: ۱

معادله‌ی سهمی مقابل را به دست آورید.



(۳۵)

تشریحی ۱۳۹۳

دشوار

نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = m^2 x^2 + 4x + m + 2$ ، محور x ها را با طول‌های α و $\frac{1}{\alpha}$ قطع می‌کند. کمترین مقدار این چهارم کدام است؟

(۳۶)

تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۸

متوسط

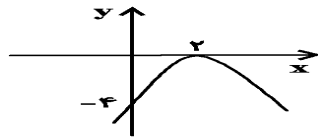
زمی خواهیم پنجره‌ای به شکل مستطیل با یک مثلث متساوی‌الاضلاع در بالای آن بسازیم. اگر محیط پنجره ۶ متر باشد، ابعاد m مستطیل را به گونه‌ای تعیین کنید که پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد. $(\frac{\sqrt{3}}{4}$ را $\frac{5}{8}$ فرض کنید).

(۳۷)

تشریحی ۱۳۹۸

متوسط

بارم: ۱

اگر شکل زیر نمودار تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشد، حاصل $a - b + c$ کدام است؟

(۳۸)

تشریحی ۱۳۹۸

متوسط

بارم: ۱

اگر بیشترین مقدار تابع $y = mx^2 + 4x + 2m - 3$ برابر -۱ باشد، مقدار m کدام است؟

(۳۹)

تشریحی ۱۳۹۶

متوسط

اگر معادله $x^4 - (m+2)x^2 + m + 5 = 0$ دارای ۴ ریشه حقیقی متمایز باشد، مجموعه مقادیر m به کدام صورت است؟
بارم: ۱

(۴۰)

تشریحی ۱۳۹۵

دشوار

اگر رأس یک سهمی روی نیمساز ربع اول باشد و محور x ها را در دو نقطه، به طول‌های -۱ و ۳ قطع کند، آنگاه این سهمی محور y ها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟
بارم: ۱

(۴۱)

تشریحی ۱۳۹۹

دشوار

اگر معادله‌ی $\frac{x}{x-2} + \frac{x+a}{x^2-4} = 1$ ریشه نداشته باشد، حاصلضرب مقادیر ممکن برای a را بیابید.
بارم: ۱

(۴۲)

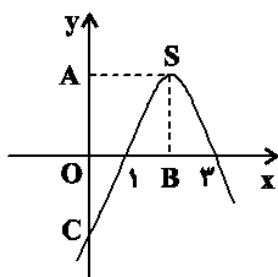
تشریحی ۱۳۹۷

متوسط

اگر ریشه‌های معادله درجه دوم $x(x-4) = 6$ ، α و β باشد، حاصل عبارت $\frac{\alpha}{\alpha^2-6} + \frac{\beta}{\beta^2-6}$ کدام است؟
بارم: ۱

(۴۳)

در شکل روبه‌رو مساحت مستطیل OASB برابر ۴ است. عرض نقطه C کدام است؟
(نقطه S، رأس تابع درجه دوم است.)



بارم: ۱

تشریحی ۱۳۹۸

متوسط

تشریحی ۱۳۹۷

(۴۴)

یک سهمی محور xها را در نقاط $x = 1$ و $x = -3$ و محور yها را در $y = 2$ قطع می‌کند. در این صورت عرض نقطه‌ای به طول ۵ روی این سهمی کدام است؟

بارم: ۱

متوسط

تشریحی ۱۳۹۶

(۴۵)

حاصل ضرب جواب‌های حقیقی معادله $(x^2 + 3)^2 - 5x^2 - 11 = 0$ کدام است؟

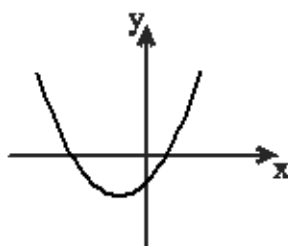
بارم: ۱

دشوار

سوالات پرتکرار ۱۳۹۹

(۴۶)

در شکل مقابل، نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ داده شده است. علامت ضرایب a, b, c و تعداد و علامت صفرهای آن را مشخص کنید.



بارم: ۱

دشوار

تشریحی ۱۴۰۰

(۴۷)

به ازای چند مقدار m ، بیشترین مقدار تابع $f(x) = mx^2 - (m + 3)x + 5$ برابر یک است؟

بارم: ۱

متوسط

نهایی ۱۴۰۰

(۴۸)

سهمی به معادله $y = x^2 - 4x$ را رسم کنید.

بارم: ۱

متوسط

تشریحی ۱۳۹۷

(۴۹)

اگر α و β ریشه‌های معادله $4x(x - 8) = -1$ باشند، حاصل $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ کدام است؟

بارم: ۱

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

(۵۰)

اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2 - 5x - 6 = 0$ باشند، آن‌گاه به ازای چه مقداری از k ریشه‌های معادله $3x^2 + kx + m = 0$ به صورت $\{\alpha^3\beta, \beta^3\alpha\}$ است؟

بارم: ۱

متوسط

تشریحی ۱۳۹۸

(۵۱)

به ازای کدام مقدار a ، مجموع ریشه‌های معادله $\frac{2}{x} - \frac{x+a}{x+2} = 1$ دو برابر حاصل ضرب آن‌هاست؟

بارم: ۱

متوسط

سوالات پرتکرار ۱۳۹۹

(۵۲)

با توجه به ضرایب معادله و علامت آن‌ها، در مورد تعداد و علامت‌های ریشه‌های معادله $3x^2 - x - 1 = 0$ بحث کنید. (بدون بارم: ۱ حل معادله)

متوسط

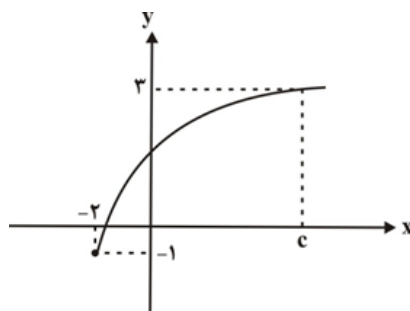
تشریحی قلمچی ۱۳۹۷

۵۳

اگر نمودار تابع $f(x) = \sqrt{2x+a} + b$ به صورت زیر باشد:

بارم: ۲

حاصل $a+b+c$ را تعیین نمایید.



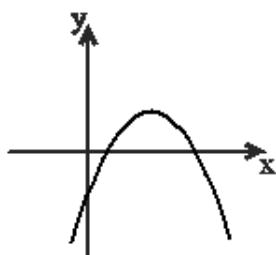
دشوار

سوالات پرتکرار ۱۳۹۹

۵۴

در شکل مقابل، نمودار سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ رسم شده است. علامت ضرایب a, b, c را مشخص کنید.

بارم: ۱



متوسط

تشریحی ۱۳۹۷

۵۵

به ازای کدام مقدار a ، توابع $f(x) = ax + 1$ و $g(x) = ax^2 + 3x + 2$ در یک نقطه متقاطعاند و طول نقطه تقاطع مثبت است؟

بارم: ۱

دشوار

تشریحی ۱۳۹۶

۵۶

نقطه می‌نیمم تابع $y = mx^2 - x + m$ ، در ناحیه اول دستگاه مختصات است. حدود m کدام است؟

بارم: ۱

دشوار

تشریحی ۱۳۹۵

۵۷

اگر ریشه‌های معادله $9x^2 + ax + b = 0$ ، از مربع معکوس ریشه‌های معادله $2x^2 - 3x - 9 = 0$ ، 2 واحد کمتر باشد، a ، کدام است؟

بارم: ۱

دشوار

تشریحی ۱۳۹۴

۵۸

اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + kx + 1 = 0$ باشند، به ازای کدام مقدار k ، ریشه‌های معادله $x^2 - 4x + 1 = 0$ به صورت $\{\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta}\}$ است؟

بارم: ۱

دشوار

تشریحی قلمچی ۱۳۹۷

۵۹

حدود k را طوری به دست آورید که معادله زیر، دو ریشه حقیقی مثبت و یک ریشه حقیقی منفی داشته باشد.

بارم: ۲

$$(x-10)(x^2+kx+2k+5)=0$$

متوسط

تکاج ۱۳۸۴

۶۰

مطلوبست تعیین دو عدد حقیقی و مثبت که مجموعشان S و حاصل ضربشان ماکزیمم است.

بارم: ۱

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

۶۱

معادله $\frac{2}{x} - \frac{3x}{x+2} = \frac{x}{x^2+2x}$ را حل کنید.

بارم: ۱

۶۲

تشریحی ۱۳۹۸ دشوار

بارم: ۱

در معادله $\sqrt{8a^2+7} - \sqrt{4a^2+3} = 1$ مقدار $\frac{|a|+1}{|a|}$ کدام است؟

۶۳

تشریحی ۱۳۹۸ متوسط

بارم: ۱

مجموع معکوس دو عدد طبیعی زوج متوالی، ۷ برابر اختلاف معکوس آن‌هاست. عدد بزرگ‌تر کدام است؟

۶۴

تشریحی ۱۳۹۹ متوسط

بارم: ۱

اگر معادله $\frac{m-3}{x} = \frac{x-4}{x^2+3x}$ فاقد جواب حقیقی باشد، m کدام می‌تواند باشد؟

۶۵

تشریحی ۱۳۹۶ دشوار

بارم: ۱

معادله $\frac{1}{\sqrt{x-1}+2} - \frac{1}{2-\sqrt{x-1}} = \frac{x-1}{4\sqrt{x-1}}$ چند جواب حقیقی دارد؟

۶۶

تشریحی ۱۳۹۹ متوسط

بارم: ۱

مجموع ریشه‌های معادله $\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = 1-x$ کدام است؟

۶۷

تشریحی ۱۳۹۷ دشوار

بارم: ۱

معادله‌ی $\frac{tx+2}{-2} = \frac{x+t-1}{x}$ فقط یک ریشه به ازای x دارد. مجموعه‌ی مقادیر t کدام است؟ ($t \neq 0$)

۶۸

تشریحی ۱۳۹۹ متوسط

بارم: ۱

مجموع جواب‌های معادله $\frac{x^2-3x}{x+1} + \frac{x+1}{x^2-3x} = 2$ کدام است؟

۶۹

تشریحی ۱۳۹۸ دشوار

بارم: ۱

تعداد جواب‌های معادله $\left(\frac{x^2-x+1}{x}\right)^2 + \left(\frac{x^2-2x+1}{x}\right)^2 = 1$ کدام است؟

۷۰

تشریحی ۱۳۹۸ متوسط

بارم: ۱

یازده کیلوگرم رنگ با غلظت ۴۰ درصد با چهار کیلوگرم رنگ از همان نوع با غلظت ۷۰ درصد مخلوط شده‌اند. با تبخیر چند کیلوگرم آن، غلظت محلول به ۵۰ درصد می‌رسد؟

۷۱

تشریحی ۱۳۹۷ متوسط

بارم: ۱

اگر $x=4$ یکی از جواب‌های معادله‌ی $x+a=\sqrt{5x-x^2}$ باشد، جواب دیگر آن کدام است؟

۷۲

تشریحی ۱۳۹۹ متوسط

بارم: ۱

فائزه و معصومه با هم کاری را در ۱۵ ساعت انجام می‌دهند. اگر فائزه به تنهایی بخواهد این کار را انجام دهد، ۴۰ ساعت نسبت به حالتی که معصومه آن را به تنهایی انجام می‌دهد، کار را زودتر تمام می‌کند. فائزه این کار را به تنهایی در چند ساعت انجام می‌دهد؟

۷۳

تشریحی ۱۳۹۶ دشوار

بارم: ۱

اگر $x(x-1) < 2(x-1)$ باشد، آن‌گاه $\sqrt{4x^2-8x+4} - \sqrt{x^2-4x+4} = ax+b$ است. حاصل $a-b$ کدام است؟

۷۴

تشریحی ۱۳۹۷ دشوار

بارم: ۱

نازنین، پازلی را به تنهایی ۶ ساعت زودتر از پدرام، کامل می‌کرد. پس از پنج ماه تمرین، سرعت نازنین و پدرام در تکمیل پازل به ترتیب ۳ و ۲ برابر شده است به طوری که هر دو با هم، همان پازل را در ۴ ساعت کامل می‌کنند. در حال حاضر اختلاف مدت زمانی که طول می‌کشد تا هر یک به تنهایی پازل را کامل کنند، چند ساعت است؟

(۷۵)

تشریحی ۱۴۰۰

متوسط

بارم: ۱

اگر مجموع جواب‌های معادله $\frac{5}{x^2+3x-4} - \frac{3}{x^2+5x+4} = \frac{m}{x}$ برابر ۸- باشد، m کدام است؟

(۷۶)

تشریحی ۱۳۹۸

متوسط

بارم: ۱

تعداد جواب‌های معادله $x + \sqrt{x^2 - 2x} = \sqrt{x}$ کدام است؟

(۷۷)

تشریحی ۱۳۹۸

متوسط

بارم: ۱

تعداد ریشه‌های حقیقی معادله $\sqrt{9 + \sqrt{x^3 - 2x^2 + x}} = 3$ کدام است؟

(۷۸)

تشریحی ۱۳۹۶

متوسط

بارم: ۱

مجموعه $\{0, -1\}$ ، مجموعه‌ی جواب معادله‌ی $\frac{ax}{2x-b} + \sqrt{x+b} = 1$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

(۷۹)

تشریحی ۱۳۹۸

متوسط

بارم: ۱

اگر $\sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{x} f(x) + 1$ باشد، جواب معادله $f(x) = -1$ کدام است؟

(۸۰)

تشریحی ۱۳۹۸

متوسط

بارم: ۱

تعداد جواب‌های معادله $\sqrt{5-x} - \sqrt{\sqrt{x}-1} = 0$ کدام است؟

(۸۱)

تشریحی ۱۳۹۷

دشوار

بارم: ۱

اگر یک جواب معادله $\frac{a-1}{2x-4} + \frac{1}{x^2-4} = \frac{x-a}{x^2-x-6}$ برابر $x=5$ باشد، جواب دیگر کدام است؟

(۸۲)

تشریحی ۱۳۹۷

متوسط

بارم: ۱

معادله رادیکالی $\sqrt{x+2} + \sqrt{ax^2+4} = 0$ دارای یک جواب حقیقی است، مقدار a کدام است؟

(۸۳)

تشریحی ۱۳۹۸

متوسط

بارم: ۱

یک استاد نجاری ۱۲ ساعت نیاز دارد تا کاری را به‌تنهایی کامل کند و دستیار او این کار را به تنهایی در ۱۶ ساعت انجام می‌دهد. استاد پس از ۴ ساعت کار به تنهایی کار را ترک کرده و ادامه آن را به دستیارش می‌سپارد تا به اتمام برساند. چند دقیقه طول می‌کشد تا دستیار کار را تمام کند؟

(۸۴)

تشریحی ۱۳۹۹

متوسط

بارم: ۱

حاصل‌ضرب جواب‌های معادله $\sqrt{6x^2-12x+3} - \sqrt{2x^2-4x+2} = 1$ کدام است؟

(۸۵)

تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۷

متوسط

بارم: ۲

ریشه‌های معادله زیر را تعیین کنید.

$$3x + \sqrt{5x-2} = 1$$

(۸۶)

تشریحی ۱۳۹۷

متوسط

بارم: ۱

تعداد جواب‌های معادله $\sqrt{3x-2} + 2x = 3$ کدام است؟

(۸۷)

تشریحی ۱۳۹۹

متوسط

بارم: ۱

اگر $x=a$ جواب معادله $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+6} = 5$ باشد، جواب معادله $\sqrt{x+a} - x = 1$ کدام است؟

(۸۸)

تشریحی ۱۳۹۷

متوسط

بارم: ۱

مجموع جواب‌ای معادله $\sqrt{x^4-4x^2} + \sqrt{4x-x^3} = 0$ کدام است؟

۸۹

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

احمد و رضا در یک لحظه از شهر تهران به طرف کرج حرکت می‌کنند. سرعت هر کدام از آنها ثابت است و فاصله بین دو شهر ۶۰ کیلومتر است. احمد هر ساعت ۴ کیلومتر کمتر از رضا می‌پیماید. رضا به شهر کرج رسیده و بلافاصله برمی‌گردد و احمد را در ۱۲ کیلومتری کرج ملاقات می‌کند، احمد با سرعت چند کیلومتر بر ساعت حرکت می‌کند؟

۹۰

متوسط

تشریحی قلم‌چی ۱۳۹۹

بارم: ۱.۵

جواب های معادله زیر را به دست آورید:

$$\frac{x-2}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{8}{x^2-4}$$

دشوار

تشریحی ۱۳۹۶

گزینه درست: null

سوال ۱

$$y - \sqrt{2}x = -1 \Rightarrow y = \sqrt{2}x - 1 \Rightarrow \text{شیب} = \sqrt{2}$$

$$ax + by = 4 \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{4}{b} \Rightarrow \text{شیب} = -\frac{a}{b}$$

دو خط موازی دارای شیب‌های برابر هستند، بنابراین: $-\frac{a}{b} = \sqrt{2} (*)$

از طرفی فاصله بین عرض از مبدأ دو خط موازی برابر ۹ واحد است. بنابراین:

$$\left| \frac{4}{b} - (-1) \right| = 9 \Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{b} = 8 \Rightarrow b = \frac{1}{2} \\ \frac{4}{b} = -10 \Rightarrow b = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(*)} \frac{-a}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$b = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$$

با $b = -\frac{2}{5}$ مقدار $a = \frac{2\sqrt{2}}{5}$ به دست می‌آید.

متوسط

تشریحی ۱۳۹۶

گزینه درست: null

سوال ۲

$$AB = 5 \Rightarrow \sqrt{(2m+1-m)^2 + (-m-2)^2} = 5$$

$$\Rightarrow (m+1)^2 + (m+2)^2 = 25$$

$$\Rightarrow m^2 + 2m + 1 + m^2 + 4m + 4 = 25$$

$$\Rightarrow 2m^2 + 6m - 20 = 0$$

$$\Rightarrow m^2 + 3m - 10 = 0 \Rightarrow (m+5)(m-2) = 0$$

$$\Rightarrow m = -5 \text{ یا } m = 2$$

شیب هر دو خط برابر $-\frac{3}{4}$ است، پس دو خط موازیند.

فاصله دو خط موازی برابر با طول ضلع مربع است. از طرفی محیط مربعی به ضلع a برابر $4a$ است.

$$\text{محیط مربع} = \frac{4k}{5} \Rightarrow \text{ضلع مربع} = \frac{2k}{5}$$

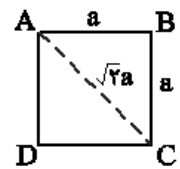
$$\begin{cases} 3x + 4y - k = 0 \\ 6x + 8y = 50 \Rightarrow 3x + 4y - 25 = 0 \end{cases}$$

$$\text{فاصله دو خط موازی: } d = \frac{|-k - (-25)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-k + 25|}{5} = \frac{2k}{5}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -k + 25 = 2k \Rightarrow 3k = 25 \Rightarrow k = \frac{25}{3} \\ -k + 25 = -2k \Rightarrow k = -25 \end{cases}$$

چون محیط مربع مقداری مثبت است، پس فقط $k = \frac{25}{3}$ قابل قبول است. در نتیجه:

$$k^2 = \frac{625}{9}$$



با توجه به شکل فرضی مقابل، دو رأس A و C مقابل هم‌اند و فاصله‌ی آنها از هم برابر با قطر مربع است. اگر ضلع مربع را a در نظر بگیریم، قطر مربع برابر با $\sqrt{2}a$ خواهد بود، پس داریم:

$$A(1, 0) \text{ و } C(-2, 3)$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}a = \sqrt{(-2-1)^2 + (3-0)^2} \Rightarrow \sqrt{2}a = \sqrt{18}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}a = 3\sqrt{2} \Rightarrow a = 3$$

بنابراین مساحت مربع برابر است با:

$$S = a^2 = 3^2 = 9$$

حاصلضرب شیب دو خط عمود بر هم (و غیر موازی با محورهای مختصات) برابر با -1 است، بنابراین:

$$x - 2y + 5 = 0 \Rightarrow 2y = x + 5 \Rightarrow y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2} \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$mm' = -1 \Rightarrow m' = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$$

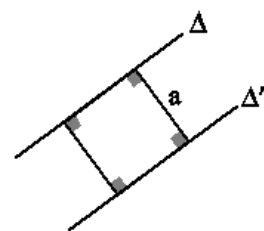
بنابراین شیب خط مورد نظر -2 است و از نقطه‌ی $A(5, -3)$ می‌گذرد، لذا:

$$y - y_A = m'(x - x_A)$$

$$\Rightarrow y - (-3) = -2(x - 5) \Rightarrow y = -2x + 7$$

شیب دو خط $2x - 2y = 3$ و $y = x + 1$ را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} 2x - 2y = 3 \Rightarrow y = x - \frac{3}{2} \Rightarrow m_1 = 1 \\ y = x + 1 \Rightarrow m_2 = 1 \end{cases}$$



دو خط موازی‌اند زیرا $m_1 = m_2$.

با توجه به شکل فرضی مقابل، طول ضلع مربع برابر است با فاصله‌ی دو خط موازی.

برای به دست آوردن فاصله‌ی دو خط موازی کافی است یک نقطه‌ی دلخواه روی یکی از خطوط در نظر گرفته و فاصله‌ی آن را از خط دیگر بیابیم. بنابراین نقطه‌ی $(0, 1)$ را روی خط $y = x + 1$ در نظر می‌گیریم و فاصله‌ی آن را از خط $2x - 2y - 3 = 0$ می‌یابیم:

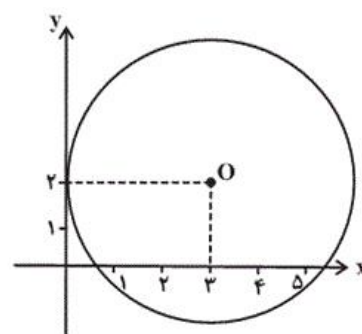
$$a = \text{طول ضلع مربع} = \frac{|2 \times (0) - 2 \times 1 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{8}}$$

$$a^2 = \left(\frac{5}{\sqrt{8}}\right)^2 = \frac{25}{8} \quad \text{مساحت مربع}$$

فاصله مرکز دایره تا خط مماس برابر شعاع دایره است:

$$r = \frac{|4(3) - 3(2) + 9|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{15}{5} = 3$$

حالا نمودار دایره را رسم می‌کنیم:



این دایره دو نقطه مشترک با محور x ها و یک نقطه مشترک با محور y ها دارد.

این دو خط یا از دو ضلع مجاور یا از دو ضلع روبرو می‌گذرند.

۱) این دو خط موازی نمی‌باشند، زیرا نمی‌تواند شیب آن‌ها با هم برابر باشد، چون، اگر $m_1 = m_2$ آن‌گاه:

$$m_1 = \frac{1}{m}, m_2 = -m^3 \Rightarrow \frac{1}{m} = -m^3$$

جواب ندارد. $\Rightarrow m^4 = -1$

۲) بنابراین این دو خط باید بر هم عمود باشند. یعنی $m_1 \times m_2 = -1$

$$m_1 = \frac{1}{m}, m_2 = -m^3$$

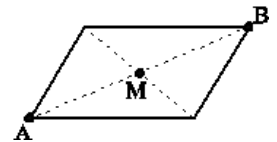
$$\Rightarrow \frac{1}{m} \times (-m^3) = -1 \quad (m \neq 0 \text{ به شرط})$$

$$\Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$$

اگر $m = 0$ در این صورت نیز این دو خط بر هم عمود خواهند بود بنابراین مسأله سه جواب دارد. $m = 0$ یا ± 1

مختصات نقطه A در هیچ یک از معادلات داده شده صدق نمی‌کند.

بنابراین A روبروی این دو خط است. کافی است محل برخورد دو خط را به دست آوریم. فرض کنیم دو خط همدیگر را در نقطه B قطع کنند.



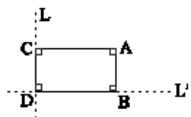
$$\begin{cases} 2y - 3x = 11 \\ 3y + 4x = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6y + 9x = -33 \\ 6y + 8x = 16 \end{cases} \Rightarrow 17x = -17$$

$$\Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow B(-1, 4)$$

مختصات وسط پاره خط AB یعنی نقطه M را به دست می‌آوریم.

$$M\left(\frac{-1+7}{2}, \frac{4+6}{2}\right) \Rightarrow M(3, 5)$$

ابتدا توجه کنید که حاصل ضرب شیب‌های دو خط $L: 2y + x - 6 = 0$ و $L': 2x - y - 7 = 0$ برابر (-1) است، پس این دو خط بر هم عمودند و مختصات نقطه $A(8, 5)$ ، در معادله هیچکدام از این دو خط صدق نمی‌کند، پس می‌توان شکل فرضی زیر را برای مسأله در نظر گرفت:



با توجه به شکل، برای یافتن طول اضلاع این مستطیل، باید فاصله نقطه A را از دو خط L و L' بدست آوریم.

$$AB = \frac{|2 \times 8 - 5 - 7|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}}, \quad AC = \frac{|2 \times (5) + 8 - 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{12}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow S(ABDC) = AB \times AC = \frac{4}{\sqrt{5}} \times \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{48}{5} = 9\frac{3}{5}$$

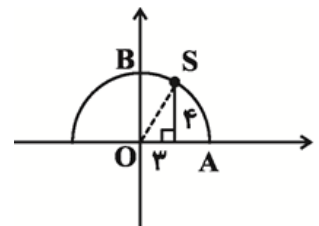
فاصله‌ی نقطه‌ی (x_0, y_0) از خط $ax + by + c = 0$ از رابطه‌ی $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ به دست می‌آید. مختصات نقاط روی خط $y = -x + 1$ به صورت $A(\alpha, -\alpha + 1)$ است. فاصله‌ی نقطه‌ی $A(\alpha, -\alpha + 1)$ از خط $D: 3x + 4y - 1 = 0$ برابر با ۲ است، لذا داریم:

$$\frac{|3 \times \alpha + 4(-\alpha + 1) - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2 \Rightarrow \frac{|-\alpha + 3|}{5} = 2$$

$$\Rightarrow |-\alpha + 3| = 10 \Rightarrow -\alpha + 3 = \pm 10$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\alpha + 3 = 10 \Rightarrow \alpha = -7 \Rightarrow A(-7, 8) \\ -\alpha + 3 = -10 \Rightarrow \alpha = 13 \Rightarrow B(13, -12) \end{cases}$$

روش اول: مطابق شکل با استفاده از قضیه فیثاغورس شعاع نیم‌دایره به دست می‌آید.



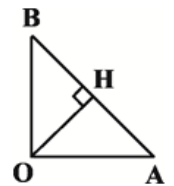
$$OS = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

در نتیجه مختصات نقطه A و B به راحتی $A(5, 0)$ و $B(0, 5)$ به دست می‌آید. حال با محاسبه شیب AB معادله AB را می‌نویسیم که به صورت $x + y - 5 = 0$ به دست می‌آید.

حال فاصله O را از AB به دست می‌آوریم:

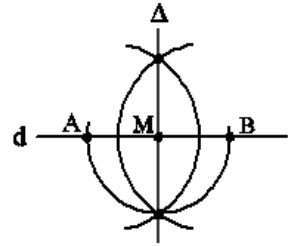
$$OH = \frac{|0 + 0 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

روش دوم:



$$S_{OAB} = \frac{OA \times OB}{2} = \frac{OH \times AB}{2} \Rightarrow \frac{5 \times 5}{2} = \frac{OH \times 5\sqrt{2}}{2} \Rightarrow OH = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

ابتدا به مرکز M ، دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط d را در دو نقطه‌ی A و B قطع کند. سپس عمود منصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. M وسط AB است و بنابراین عمود منصف AB خطی است که از M گذشته و بر d عمود است.



الف) خط مورد نظر از $(a, 0)$ و $(0, b)$ می‌گذرد. بنابراین شیب این خط با استفاده از فرمول برابر خواهد بود.

با استفاده از فرم شیب - عرض از مبدأ معادله ی خط به صورت $y = -\frac{b}{a}x + b$ یا $\frac{b}{a}x + y = b$ نوشته می‌شود. با تقسیم طرفین بر b معادله ی $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ حاصل می‌شود.

ب) با استفاده از نتیجه ی قسمت (الف) داریم: $\frac{x}{5} + \frac{y}{-6} = 1$ با از بین بردن مخرج ها، معادله به فرم استاندارد $6x - 5y = 30$ تبدیل می‌شود.

فاصله نقطه $A(1, b)$ از دو خط $y - x = 0$ و $y + x = 0$ باید یکسان باشد.

$$AH_1 = AH_2 \Rightarrow \frac{|b-1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|b+1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \Rightarrow |b-1| = |b+1|$$

$$\begin{cases} b-1 = b+1 \Rightarrow \text{وَاب ندارد} \\ b-1 = -(b+1) \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow b = 0 \end{cases}$$

از آنجایی که نقطه D وسط AB است، داریم:

$$A + B = 2D \Rightarrow \begin{cases} m + n = 2(-1) \\ n + 2 - m = 2(3) \end{cases} \Rightarrow m = -3, n = 1$$

در نتیجه:

$$\begin{cases} A(m, n) = A(-3, 1) \\ B(n, 2-m) = B(1, 5) \end{cases}$$

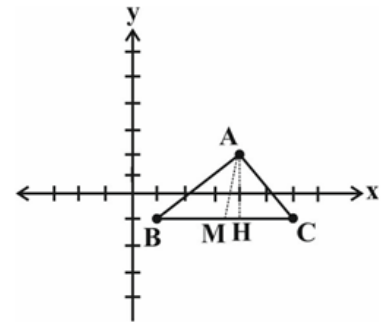
$$\Rightarrow AB = \sqrt{(-3-1)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

از طرفی می‌دانیم در یک مثلث طول پاره‌خط واصل بین وسط‌های دو ضلع برابر با نصف طول ضلع دیگر مثلث است، به عبارتی:

$$EF = \frac{1}{2}AB \Rightarrow EF = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

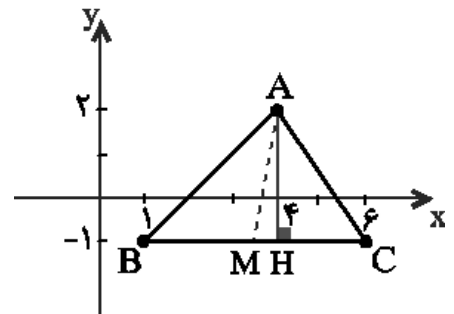
نقطه‌ی H پای ارتفاع است، پس بنابر فرضیات سؤال و شکل زیر طول آن همان x_A و عرضش همان $y_B = y_C$ است: $H(۴, -۱)$

نقطه‌ی M نیز وسط BC است، بنابراین:



$$M\left(\frac{۶+۱}{۲}, \frac{-۱-۱}{۲}\right) = \left(\frac{۷}{۲}, -۱\right)$$

$$\Rightarrow MH = \sqrt{\left(۴ - \frac{۷}{۲}\right)^2 + (-۱+۱)^2} = \sqrt{\frac{۱}{۴}} = \frac{۱}{۲}$$



با توجه به شکل، از آنجا که نقاط B و C هم‌عرض هستند و روی یک خط افقی قرار دارند، مختصات پای ارتفاع H به صورت $H(۴, -۱)$ است. از طرفی M وسط پاره‌خط BC است، بنابراین:

$$M \begin{cases} \frac{x_B + x_C}{۲} = \frac{-۱+۶}{۲} = \frac{۵}{۲} \\ \frac{y_B + y_C}{۲} = \frac{-۱+(-۱)}{۲} = -۱ \end{cases}$$

فاصله دو نقطه هم‌عرض $H(۴, -۱)$ و $M(\frac{۵}{۲}, -۱)$ برابر است با:

$$MH = |x_H - x_M| = |۴ - \frac{۵}{۲}| = \frac{۳}{۲}$$

معادله‌ی خطی که از نقطه‌ی $(۳, ۲)$ گذشته و شیب آن ۲- باشد، به صورت زیر است:

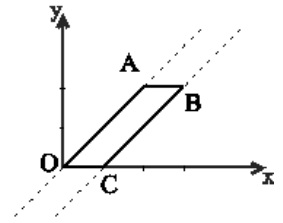
$$\begin{aligned} y - ۲ &= -۲(x - ۳) \Rightarrow y - ۲ = -۲x + ۶ \\ &\Rightarrow ۲x + y - ۸ = ۰ \end{aligned}$$

مختصات نقطه‌ای به طول $\sqrt{۳}$ روی خط $\sqrt{۳}x - ۲y = ۱$ برابر است با:

$$\sqrt{۳} \times \sqrt{۳} - ۲y = ۱ \Rightarrow -۲y = -۲ \Rightarrow y = ۱ \Rightarrow (\sqrt{۳}, ۱)$$

$$\Rightarrow d = \frac{|۲\sqrt{۳} + ۱ - ۸|}{\sqrt{۲^2 + ۱^2}} = \frac{۷ - ۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۵}}$$

چون اضلاع متوازی الاضلاع دو به دو موازی‌اند، کافی است از نقطه B خطی به موازات نیمساز ربع اول رسم کنیم تا محور xها را در نقطه C قطع کند:



$y = x \Rightarrow m = 1$ معادله نیمساز ربع اول

خط گذرنده از رأس B و موازی $y = x$ را به دست می‌آوریم:

$$y - 2 = 1(x - 3) \Rightarrow y = x - 1$$

$$\xrightarrow{y=0} x = 1 \Rightarrow C(1, 0)$$

ابتدا شیب شعاع گذرنده از نقطه $(8, -5)$ را به دست می‌آوریم:

$$m = \frac{-3 - (-5)}{2 - 8} = -\frac{1}{3}$$

می‌دانیم خط مماس بر دایره بر شعاع گذرنده از نقطه تماس عمود است. بنابراین شیب خط مماس برابر است با:

$$m_{\text{مماس}} = \frac{-1}{m} = 3$$

$$y - (-5) = 3(x - 8) \Rightarrow y = 3x - 29$$

محل برخورد با محور طول‌ها:

$$3x - 29 = 0 \Rightarrow x = \frac{29}{3}$$

پس خط مماس محور xها را در نقطه $(\frac{29}{3}, 0)$ قطع می‌کند.

(الف)

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{1 + 5}{2} = 3$$

$$y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{4 + 1}{2} = 2.5$$

(ب) میانه وارد بر ضلع BC همان پاره خط AM است.

$$|AM| = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2}$$

$$= \sqrt{(3 - 1)^2 + (2.5 - 1)^2} = \sqrt{4 + \frac{9}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} = 2.5$$

مرکز دایره روی عمود منصف وتر AB قرار دارد، بنابراین مرکز دایره محل برخورد عمود منصف AB و خط $y = 3x - 1$ است.

$$m_{AB} = \frac{5-2}{2-(-1)} = \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow AB \text{ شیب عمود منصف}$$

$$AB \text{ وسط } M : \left(\frac{2-1}{2}, \frac{5+2}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2} \right)$$

$$y - \frac{7}{2} = -1 \left(x - \frac{1}{2} \right) \Rightarrow y = -x + 4$$

$$\begin{cases} y = -x + 4 \\ y = 3x - 1 \end{cases} \Rightarrow 3x - 1 = -x + 4 \Rightarrow 4x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{4}$$

$$y = 3x - 1 \Rightarrow y = 3\left(\frac{5}{4}\right) - 1 = \frac{11}{4} \quad \text{مرکز دایره} : \left(\frac{5}{4}, \frac{11}{4} \right)$$

$\Rightarrow$ روی ضلع داده شده قرار ندارد $A(-1, 2)$

$$\text{فاصله نقطه } A \text{ از ضلع داده شده} = a = \frac{|4(-1) + 3(2) - 12|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 2$$

$$\text{مساحت مربع} = a^2 = 2^2 = 4$$

نقطه A روی معادله خط داده شده (ضلع مربع) قرار ندارد، پس فاصله آن تا خط برابر با طوی ضلع مربع است.

$$A(2, 3), \quad 3x - 4y - 9 = 0$$

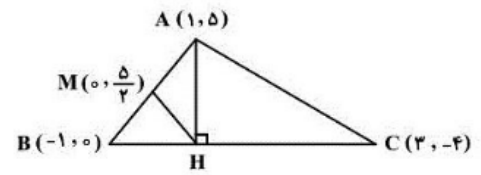
$$AH = \frac{3(2) - 4(3) - 9}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{-15}{5} = 3 \quad \text{طول ضلع مربع}$$

$$\Rightarrow \text{قطر مربع} = 3\sqrt{2}$$

نقطه وسط پاره خط AB روی خط $y + x = 5$ قرار دارد. اگر این نقطه را M بنامیم، داریم:

$$M = \frac{A+B}{2} \Rightarrow M\left(\frac{m-1+3}{2}, \frac{2+m+4}{2}\right) = \left(\frac{m+2}{2}, \frac{m+6}{2}\right)$$

$$M \in d \Rightarrow \frac{m+2}{2} + \frac{m+6}{2} = 5 \Rightarrow 2m + 8 = 10 \Rightarrow m = 1$$



$$BC \text{ ضلع } m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4}{3+1} = -1$$

$$BC \text{ معادله: } y = -x + h \xrightarrow{B(-1, 0)} 0 = 1 + h \Rightarrow h = -1$$

$$\Rightarrow BC : y = -x - 1$$

$$AH \text{ ارتفاع معادله: } y = \frac{-1}{m_{BC}} x + h' = x + h'$$

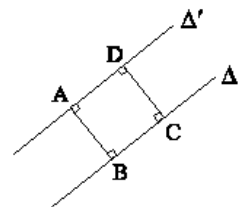
$$\xrightarrow{A(1, 5)} 5 = 1 + h' \Rightarrow h' = 4 \Rightarrow y = x + 4$$

$$\xrightarrow{BC \text{ و } AH \text{ تقاطع}} H \text{ نقطه: } \left(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$AB \text{ ضلع } M\left(\frac{1-1}{2}, \frac{5+0}{2}\right) = \left(0, \frac{5}{2}\right)$$

$$\Rightarrow MH = \sqrt{\left(-\frac{5}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + 1} = \frac{\sqrt{29}}{2}$$

دو خط $\Delta: 2x - 2y = 3$ و $\Delta': y = x + 1$ ، با هم موازی هستند و مطابق شکل مقابل، طول ضلع مربع مفروض سؤال، برابر با فاصله بین این دو خط موازی است.



برای بدست آوردن فاصله بین این دو خط موازی، معادله آنها را طوری می‌نویسیم که ضرایب x و ضرایب y در هر دو معادله با هم برابر باشند:

$$\Delta: 2x - 2y - 3 = 0$$

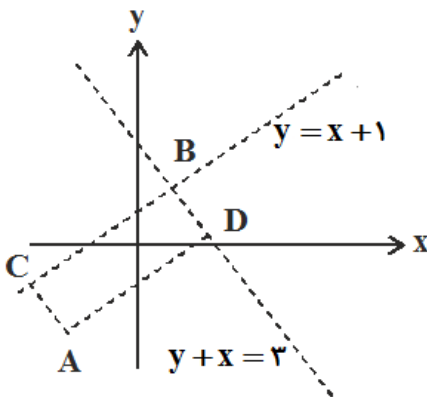
$$\Delta': y = x + 1 \Rightarrow \Delta': 2x - 2y + 2 = 0$$

فاصله بین دو خط موازی به معادله $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ ، از رابطه $\frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ بدست می‌آید.

$$\text{پس: } AB = \frac{|-3 - 2|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{8}}$$

$$\Rightarrow S(ABCD) = AB^2 = \frac{25}{8}$$

چون حاصل ضرب شیب ضلع BD و BC برابر منفی یک است، پس BD بر BC عمود بوده و چهار ضلعی مستطیل است. لذا طول قطر AB برابر طول قطر CD است.

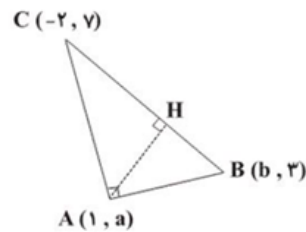


$$B \text{ مختصات } = \begin{cases} y - x = 1 \\ y + x = 3 \end{cases} \Rightarrow y = 2, x = 1$$

$$\Rightarrow BA = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (2 - (-2))^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow CD = 2\sqrt{5}$$

از آنجایی که خط گذرنده از وتر و ارتفاع وارد بر آن بر هم عمودند، لذا شیب آن‌ها، قرینه و معکوس یکدیگر است؛ به عبارتی اگر شیب خط گذرنده از وتر را m فرض کنیم، داریم:



$$\frac{y}{x} \times m = -1 \Rightarrow m = -\frac{x}{y}$$

از طرفی داریم:

$$m_{BC} = \frac{3-7}{b+2} \Rightarrow m = \frac{-4}{b+2} \Rightarrow \frac{-4}{b+2} = \frac{-4}{b+2} \Rightarrow b+2=7 \Rightarrow b=5$$

از طرفی بنابر رابطه فیثاغورس نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} AC^2 + AB^2 &= BC^2 \Rightarrow (1+2)^2 + (a-7)^2 + (1-5)^2 + (a-3)^2 \\ &= (-2-5)^2 + (7-3)^2 \\ \Rightarrow a^2 - 14a + 49 + a^2 - 6a + 9 + 9 + 16 &= 65 \Rightarrow 2a^2 - 20a + 18 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a^2 - 10a + 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 9 \end{cases}$$

پس $a + b$ برابر با ۶ یا ۱۴ می‌تواند باشد.

(۱) $x = \alpha \Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha - 2 = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha = 2$ در معادله صدق می‌کند.

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 4 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(2)-(1)} A = \alpha^2 - 4\alpha - \alpha - \beta = 2 - \alpha - \beta = 2 - 4 = -2$$

الف) در معادله درجه دوم داریم:

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{\frac{1}{8}}{2} = \frac{1}{16}, \quad \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{m+2}{2}$$

طبق صورت سوال داریم:

$$\begin{aligned} \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} &= 2 \xrightarrow{\text{توان ۲}} \alpha + \beta - 2\sqrt{\alpha\beta} = 4 \\ \Rightarrow \frac{m+2}{2} - 2\sqrt{\frac{1}{16}} &= 4 \Rightarrow \frac{m+2}{2} - \frac{1}{2} = 4 \\ \Rightarrow m+2-1 &= 8 \Rightarrow m=7 \end{aligned}$$

ب) اگر $m=7$ باشد، $\Delta > 0$ ، $-\frac{b}{a} > 0$ و $\frac{c}{a} > 0$ است پس معادله دو ریشه حقیقی مثبت دارد و $\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}$ تعریف شده است. پس $m=7$ قابل قبول است.

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = 2 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} a + b - 2\sqrt{ab} = 4$$

می‌دانیم $\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{1}{16}$ و $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{m+2}{2}$ است:

$$\begin{aligned} \frac{m+2}{2} - 2\sqrt{\frac{1}{16}} &= 4 \Rightarrow \frac{m+2}{2} - \frac{1}{2} = 4 \\ \Rightarrow \frac{m+2}{2} &= 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow m+2=9 \Rightarrow m=7$$

اگر $m=7$ باشد، $\Delta > 0$ ، $-\frac{b}{a} > 0$ و $\frac{c}{a} > 0$ است. پس معادله دو ریشه‌ی مثبت دارد و $\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}$ تعریف شده است.

نمودار سهمی در نقطه‌ای به طول ۲ بر محور x مماس است، پس می‌توان معادله‌ی آن را به صورت $y = a(x-2)^2$ در نظر گرفت. از طرفی نقطه‌ی $(0, 3)$ روی نمودار سهمی قرار دارد، بنابراین در معادله‌ی آن صدق می‌کند:

$$\xrightarrow{\text{سهمی } (0, 3) \in} 3 = a(0-2)^2 \Rightarrow 4a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{4}(x-2)^2 = \frac{3}{4}(x^2 - 4x + 4)$$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 3$$

چون نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = m^2 x^2 + 4x + m + 2$ ، محور x ها را با طول‌های α و $\frac{1}{\alpha}$ قطع می‌کند، پس ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $m^2 x^2 + 4x + m + 2 = 0$ معکوس یکدیگرند (حاصل ضرب آن‌ها برابر یک است)، می‌دانیم اگر ریشه‌های حقیقی معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آنگاه $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = \frac{m+2}{m^2} = 1 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (m-2)(m+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m=2 \text{ (غیر قابل قبول)} \\ m=-1 \end{cases}$$

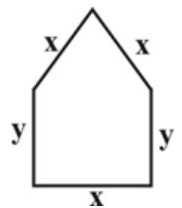
توجه کنید که به ازای $m=2$ ، معادله به صورت $4x^2 + 4x + 4 = 0$ تبدیل می‌شود که در آن $\Delta < 0$ ، یعنی معادله ریشه ندارد و نمودار تابع f ، محور x ها را قطع نمی‌کند.

$$m = -1 \Rightarrow f(x) = x^2 + 4x + 1$$

مقدار ماکزیمم (در حالت $a < 0$) و یا مینیمم (در حالت $a > 0$) تابع درجه دوم با ضابطه‌ی $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، برابر $-\frac{\Delta}{4a}$ است، پس در تابع بالا:

$$\min(f) = \frac{-(16-4)}{4} = -3$$

شکل پنجره را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.



$$\text{محیط پنجره} = 6 \Rightarrow 3x + 2y = 6 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 3 \quad (1)$$

مساحت مثلث + مساحت مستطیل = مساحت پنجره

$$= xy + \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 = xy + 0.433x^2$$

$$\stackrel{(1)}{=} x\left(-\frac{3}{2}x + 3\right) + 0.433x^2 = -x^2 + 3x$$

برای آن‌که پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد، باید مساحت آن حداکثر باشد. بنابراین:

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2}$$

$$y = -\frac{3}{2}x + 3 = -\frac{3}{2} \times \left(\frac{3}{2}\right) + 3 = \frac{3}{4}$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

سهمی در $x = 2$ بر محور x ها مماس است، پس رأس سهمی نقطه $(2, 0)$ است. داریم:

$$S(2, 0) \in f \Rightarrow \frac{-b}{2a} = 2 \Rightarrow b = -4a \quad (*)$$

$$f(x) = a(x-2)^2 \xrightarrow{(0, -4) \in f} -4 = a(0-2)^2$$

$$\Rightarrow a = -1 \xrightarrow{(*)} b = 4, (0, -4) \in f \Rightarrow c = -4$$

$$\left. \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 4 \\ c = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow a - b + c = -1 - 4 + (-4) = -9$$

برای اینکه یک سهمی بیشترین مقدار را داشته باشد، باید دهانه سهمی رو به پایین باشد، یعنی $m < 0$ باشد. بیشترین مقدار همان ماکزیمم مقدار تابع است که برابر است با:

$$-\frac{\Delta}{4a} = -1 \Rightarrow \Delta = 4a \Rightarrow 16 - 4(m)(2m - 3) = 4m$$

$$\Rightarrow 16 - 8m^2 + 12m = 4m \Rightarrow -8m^2 + 8m + 16 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m = -1 \text{ ق.ق} \\ m = +2 \text{ غ.ق. (چون باید } m < 0 \text{ باشد)} \end{array} \right.$$

معادله درجه چهارم $ax^4 + bx^2 + c = 0$ در صورتی دارای چهار ریشه حقیقی متمایز است که بعد از تبدیل آن به معادله درجه دوم، Δ ، S و P در معادله جدید هر سه مثبت باشند؛ به عبارت دیگر، معادله جدید، دو ریشه مثبت داشته باشد.

$$x^4 - (m+2)x^2 + m + 5 = 0, \quad x^2 = y$$

$$\Rightarrow y^2 - (m+2)y + m + 5 = 0$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow (m+2)^2 - 4(m+5) > 0$$

$$\Rightarrow m^2 + 4m + 4 - 4m - 20 > 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 16 > 0 \Rightarrow m < -4 \text{ یا } m > 4 \quad (1)$$

$$S > 0 \Rightarrow m+2 > 0 \Rightarrow m > -2 \quad (2)$$

$$P > 0 \Rightarrow m+5 > 0 \Rightarrow m > -5 \quad (3)$$

از اشتراک (۱)، (۲)، (۳) خواهیم داشت:

$$\Rightarrow m > 4$$

چون رأس سهمی روی نیمساز ربع اول است، مختصات آن را به صورت $S(\alpha, \alpha)$ در نظر می‌گیریم. با توجه به این که محل برخورد سهمی با محور x ها، $x = ۳, x = -۱$ است، بنابراین:

$$x = \frac{۳ + (-۱)}{۲} = ۱ \Rightarrow S(۱, ۱)$$

$$y = a(x-۱)^۲ + ۱ \xrightarrow{\text{سهمی } (۳, ۰) \in} ۰ = ۴a + ۱ \Rightarrow a = -\frac{۱}{۴}$$

بنابراین:

$$y = -\frac{۱}{۴}(x-۱)^۲ + ۱$$

$$y = -\frac{۱}{۴}(۰-۱)^۲ + ۱ = \frac{۳}{۴}$$

برای یافتن عرض نقطه‌ی تلاقی سهمی با محور y ها، x را برابر با صفر قرار می‌دهیم:

ابتدا معادله را حل می‌کنیم:

$$\frac{x}{x-۲} + \frac{x+a}{x^۲-۴} = ۱ \Rightarrow \frac{x}{x-۲} + \frac{x+a}{(x-۲)(x+۲)} = ۱$$

طرفین معادله را در کوچکترین مضرب مشترک $(x-۲)(x+۲)$ ضرب می‌کنیم:

$$(x-۲)(x+۲) \left(\frac{x}{x-۲} + \frac{x+a}{(x-۲)(x+۲)} \right) = 1 \times (x-۲)(x+۲)$$

$$\Rightarrow x(x+۲) + x+a = x^۲-۴$$

$$\Rightarrow x^۲+۲x+x+a = x^۲-۴$$

$$\Rightarrow ۳x = -a-۴ \Rightarrow x = \frac{-a-۴}{۳}$$

اگر جواب $x = \frac{-a-۴}{۳}$ برابر با ریشه‌های مخرج معادله‌ی اصلی باشد، آنگاه غیرقابل قبول خواهد بود و معادله ریشه ندارد. ریشه‌های مخرج معادله‌ی اصلی برابر با ۲ و -۲ است، بنابراین:

$$\begin{cases} x=۲ \Rightarrow \frac{-a-۴}{۳} = ۲ \Rightarrow -a-۴=۶ \Rightarrow a=-۱۰ \\ x=-۲ \Rightarrow \frac{-a-۴}{۳} = -۲ \Rightarrow -a-۴=-۶ \Rightarrow a=۲ \end{cases}$$

بنابراین اگر $a = -۱۰$ یا $a = ۲$ باشد، معادله جواب ندارد و حاصلضرب مقادیر a برابر است با:

$$۲ \times (-۱۰) = -۲۰$$

$$x^۲ - ۴x - ۶ = ۰ \xrightarrow{\text{ریشه های معادله است } \alpha, \beta}$$

$$\alpha^۲ - ۶ = ۴\alpha, \beta^۲ - ۶ = ۴\beta \Rightarrow \frac{\alpha}{۴\alpha} + \frac{\beta}{۴\beta} = \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

دشوار

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۴۳

با توجه به آن که $x = x_B$ محور تقارن تابع است، پس $x_B = 2$ یعنی $OB = 2$ است.

$$S = OA \times OB \Rightarrow 4 = 2 \times OA \Rightarrow OA = 2 \Rightarrow y_S = 2$$

$$y = a(x-1)(x-3) \xrightarrow{(2,2)} 2 = a(1)(-1) \Rightarrow a = -2$$

$$\Rightarrow y = -2(x-1)(x-3) \xrightarrow{x=0} y_C = -6$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۴۴

معادله این سهمی برابر است با: $y = a(x-1)(x+3)$. چون این سهمی از نقطه $(0,2)$ می‌گذرد، بنابراین خواهیم داشت:

$$2 = a(0-1)(0+3) \Rightarrow 2 = -3a \Rightarrow a = -\frac{2}{3}$$

$$y = -\frac{2}{3}(x-1)(x+3)$$

$$x = 5 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}(5-1)(5+3) = -\frac{2}{3} \times 4 \times 8 = -\frac{64}{3}$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۶

گزینه درست: null

سوال ۴۵

ساده شده معادله، یک معادله درجه ۴ است. بنابراین برای حل آن از تغییر متغیر $x^2 + 3 = y$ استفاده می‌کنیم تا به معادله‌ای درجه دوم تبدیل شود.

$$x^2 + 3 = y \Rightarrow x^2 = y - 3$$

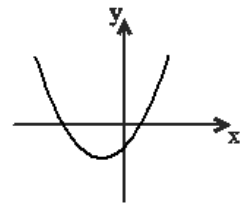
$$(x^2 + 3)^2 - 5x^2 - 11 = 0 \Rightarrow y^2 - 5(y-3) - 11 = 0$$

$$\Rightarrow y^2 - 5y + 15 - 11 = 0$$

$$\Rightarrow y^2 - 5y + 4 = 0 \Rightarrow (y-4)(y-1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=4 \Rightarrow x^2 = 4-3=1 \Rightarrow x=\pm 1 \\ y=1 \Rightarrow x^2 = 1-3=-2 \Rightarrow \text{جواب حقیقی ندارد.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{حاصل ضرب جواب‌ها} = -1 \times 1 = -1$$



نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ رو به بالاست، پس ضریب x^2 مثبت است، یعنی $a > 0$. از طرفی طول نقطه‌ی مینیمم تابع منفی است، بنابراین:

$$x_{\min} = \frac{-b}{2a} < 0 \xrightarrow{a > 0} b > 0$$

همچنین عرض از مبدأ تابع که به ازای $x = 0$ به دست می‌آید مقداری منفی است، در نتیجه:

$$\xrightarrow{x=0} y = a(0)^2 + b(0) + c = c < 0$$

نمودار تابع محورهای x را در دو نقطه یکی با طول مثبت و دیگری با طول منفی قطع می‌کند، پس معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ یک ریشه‌ی مثبت و یک ریشه‌ی منفی دارد.

بیشترین مقدار سهمی (یا همان ماکزیمم) عرض رأس سهمی است، پس باید عرض رأس را برابر ۱ قرار دهیم:

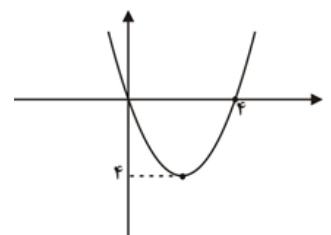
$$\begin{aligned} y &= mx^2 - (m+3)x + 5 \\ \frac{-\Delta}{4a} &= 1 \Rightarrow -\frac{(m+3)^2 - 4(m)(5)}{4m} = 1 \\ \Rightarrow m^2 + 6m + 9 - 20m &= -4m \\ \Rightarrow m^2 - 10m + 9 &= 0 \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=9 \end{cases} \end{aligned}$$

با توجه به این که $m=1$ و $m=9$ هر دو مثبت‌اند و سهمی $y = mx^2 - (m+3)x + 5$ وقتی ماکزیمم دارد که ضریب x^2 منفی باشد، لذا $m < 0$ ، پس هیچ کدام از جواب‌های به دست آمده قابل قبول نیست.

دهانه سهمی رو به بالا $a = 1 > 0$

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2} = 2$$

$$y_s = 2^2 - 4 \times 2 = -4$$



$$\text{راس سهمی} \quad \begin{cases} x_s = 2 \\ y_s = -4 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=0 \\ y=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases} \end{cases}$$

سوال ۴۹

گزینه درست: null

تشریحی ۱۳۹۷

متوسط

$$4x^2 - 32x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{32}{4} = 8 \\ \alpha\beta = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2}}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

$$= \frac{\sqrt{S + 2\sqrt{P}}}{\sqrt{P}} = \frac{\sqrt{8 + 2 \times \frac{1}{4}}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$$

سوال ۵۰

گزینه درست: null

تشریحی ۱۳۹۹

متوسط

با توجه به معادله $2x^2 - 5x - 6 = 0$ می‌توان گفت که:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{5}{2}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} = -3$$

مجموع ریشه‌های معادله $3x^2 + kx + m = 0$ برابر $-\frac{k}{3} = -\frac{b}{a}$ است. از طرفی اگر ریشه‌های این معادله را $\beta^3\alpha$ و $\alpha^3\beta$ فرض کنیم، داریم:

$$\text{مجموع ریشه‌ها: } \alpha^3\beta + \beta^3\alpha = \alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$= \alpha\beta((\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta) = -3\left(\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2(-3)\right)$$

$$= -3\left(\frac{25}{4} + 6\right) = -3\left(\frac{25 + 24}{4}\right) = -\frac{147}{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{k}{3} = -\frac{147}{4} \Rightarrow k = \frac{441}{4}$$

سوال ۵۱

گزینه درست: null

تشریحی ۱۳۹۸

متوسط

$$\frac{2}{x} = \frac{x+a}{x+2} + 1 \Rightarrow \frac{2}{x} = \frac{2x+a+2}{x+2} \Rightarrow 2x^2 + ax + 2 = 2x + 4$$

$$\Rightarrow 2x^2 + ax - 2 = 0, \quad S = 2P \Rightarrow \frac{-a}{2} = 2 \times \frac{-2}{2} \Rightarrow \frac{-a}{2} = -2 \Rightarrow a = 4$$

توجه کنید که به ازای $a = 4$ ، جواب معادله $x = -2$ یا $x = 0$ نمی‌شود.

سوال ۵۲

گزینه درست: null

سوالات پرتکرار ۱۳۹۹

متوسط

$$3x^2 - x - 1 = 0$$

ابتدا Δ ی معادله را می‌یابیم. از آن جا که $\Delta = (-1)^2 - 4(3)(-1) = 13$ مثبت است، پس معادله دو ریشه‌ی حقیقی دارد. از طرفی حاصلضرب

ریشه‌های معادله $P = \frac{c}{a} = \frac{-1}{3}$ منفی است، پس معادله دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت دارد.

$$\left. \begin{array}{l} \text{دامنه: } 2x + a \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{a}{2} \\ \text{با توجه به نمودار تابع: } x \geq -2 \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{a}{2} = -2 \Rightarrow a = 4$$

$$(-2, -1) \in f \Rightarrow -1 = \sqrt{2(-2) + 4} + b$$

$$\Rightarrow b = -1$$

بنابراین ضابطه تابع $f(x)$ برابر است با:

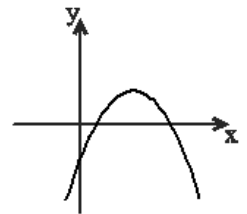
$$f(x) = \sqrt{2x + 4} - 1$$

پس داریم:

$$f(c) = 3 \Rightarrow \sqrt{2c + 4} - 1 = 3 \Rightarrow 2c + 4 = 16 \Rightarrow 2c = 12 \Rightarrow c = 6$$

بنابراین:

$$a + b + c = 4 - 1 + 6 = 9$$



نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ رو به پایین است، پس ضریب x^2 منفی است، یعنی $a < 0$. از طرفی طول نقطه‌ی ماکزیمم سهمی مثبت است، بنابراین:

$$x_{\max} = \frac{-b}{2a} > 0 \xrightarrow{a < 0} b > 0$$

همچنین عرض از مبدأ نمودار که به ازای $x = 0$ به دست می‌آید مقداری منفی است، لذا:

$$\xrightarrow{x=0} y = a(0)^2 + b(0) + c = c < 0$$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow ax^2 + 3x + 2 = ax + 1 \Rightarrow ax^2 + (3-a)x + 1 = 0$$

برای این‌که این معادله تنها یک ریشه داشته باشد، باید دلتای آن را مساوی صفر قرار دهیم:

$$(3-a)^2 - 4a = 0 \Rightarrow a^2 - 10a + 9 = 0 \Rightarrow (a-9)(a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=9 \end{cases}$$

$$a=1 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1 \quad \text{غ ق ق}$$

$$a=9 \Rightarrow 9x^2 - 6x + 1 = 0 \Rightarrow (3x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \quad \text{ق ق غ}$$

چون نقطه می‌نیمم تابع، در ناحیه اول دستگاه مختصات است، پس طول و عرض آن مثبت است، بنابراین:

$$\begin{cases} x_{\min} = \frac{-b}{2a} = -\frac{-1}{2m} = \frac{1}{2m} > 0 \Rightarrow m > 0 \quad (I) \\ y_{\min} = \frac{-\Delta}{4a} = -\frac{1-4m}{4m} > 0 \xrightarrow{I} 1-4m^2 < 0 \Rightarrow |m| > \frac{1}{2} \quad (II) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(I) \cap (II)} m > \frac{1}{2}$$

به دلیل آن که می‌توان ریشه‌های معادله‌ی اصلی را به دست آورد بهتر است از روش زیر استفاده کنیم.

$$2x^2 - 3x - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'_1 = \frac{1}{x_1} - 2 = \frac{1}{3} - 2 = \frac{-17}{9} \\ x'_2 = \frac{1}{x_2} - 2 = \frac{2}{3} - 2 = \frac{-14}{9} \end{cases} \Rightarrow S' = x'_1 + x'_2 = \frac{-17}{9} - \frac{14}{9} = \frac{-31}{9}$$

$$\xrightarrow{x^2 - S'x + P' = 0} x^2 + \frac{31}{9}x + P' = 0 \xrightarrow{\times 9} 9x^2 + 31x + 9P' = 0$$

نیازی به محاسبه P' نیست

در مقایسه با معادله‌ی خواسته شده $a = 31$ است.

با توجه به معادله‌ی $x^2 + kx + 1 = 0$:

$$\begin{cases} \text{حاصل جمع ریشه ها} : S = \alpha + \beta = -k \\ \text{حاصل ضرب ریشه ها} : P = \alpha\beta = 1 \end{cases} \quad (*)$$

چون ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 4x + 1 = 0$ ، به صورت $\{\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta}\}$ است، بنابراین:

$$S' = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 4 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = 16$$

$$\xrightarrow{(*)} -k + 2\sqrt{1} = 16 \Rightarrow -k = 14 \Rightarrow k = -14$$

یکی از جواب های معادله $(x-10)(x^2+kx+2k+5)=0$ ، $x=10$ است. پس معادله $x^2+kx+2k+5=0$ باید یک ریشه حقیقی مثبت و یک ریشه حقیقی منفی داشته باشد، پس شرایط زیر باید برقرار باشد:

$$1) \Delta > 0$$

$$k^2 - 4 \times (1) \times (2k+5) > 0 \Rightarrow k^2 - 8k - 20 > 0 \Rightarrow \begin{cases} k < -2 \\ 10 < k \end{cases} \quad (1)$$

2) حاصل ضرب ریشه ها منفی است) $P < 0$

$$P < 0 \Rightarrow \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{2k+5}{1} < 0 \Rightarrow k < -\frac{5}{2} \quad (2)$$

از اشتراک شرط های (۱) و (۲) برای مجموعه k خواهیم داشت:

$$k < -\frac{5}{2}$$

متوسط

تکاج ۱۳۸۴

گزینه درست: null

سوال ۶۰

یک عدد را x و عدد دیگر را $S-x$ فرض کنید. حاصل ضرب این دو یک تابع درجه ی دو از x است. $p(x) = x(S-x) = -x^2 + Sx$ با مربع کامل کردن، این تابع به صورت $p(x) = -(x - \frac{S}{2})^2 + \frac{S^2}{4}$ نوشته می شود. بنابراین مقدار ماکزیمم تابع به ازای $x = \frac{S}{2}$ اتفاق می افتد. هر دو عدد برابر $\frac{S}{2}$ هستند.

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۶۱

ابتدا مخرج کسر را تا حد امکان تجزیه می کنیم:

$$\frac{2}{x} - \frac{3x}{x+2} = \frac{x}{x^2+2x} \Rightarrow \frac{2}{x} - \frac{3x}{x+2} = \frac{x}{x(x+2)}$$

حال طرفین معادله را در کوچکترین مضرب مشترک مخرج کسرها که برابر $x(x+2)$ است، ضرب می کنیم:

$$x(x+2)\left(\frac{2}{x} - \frac{3x}{x+2}\right) = \frac{x}{x(x+2)} \times x(x+2)$$

$$\Rightarrow 2(x+2) - x \times 3x = x \Rightarrow 2x + 4 - 3x^2 = x$$

$$\Rightarrow 3x^2 - x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1-4(-12)}}{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1+7}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \\ x = \frac{1-7}{6} = \frac{-6}{6} = -1 \end{cases}$$

دشواری

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۶۲

$$\sqrt{8a^2+7} - \sqrt{4a^2+3} = 1 \Rightarrow \sqrt{8a^2+7} = \sqrt{4a^2+3} + 1$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 8a^2+7 = 4a^2+3+1+2\sqrt{4a^2+3}$$

$$\Rightarrow 4a^2+3 = 2\sqrt{4a^2+3} \Rightarrow \sqrt{4a^2+3} = 2$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 4a^2+3 = 4 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow |a| = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{|a|+1}{|a|} = \frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}} = 3$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۶۳

دو عدد طبیعی زوج متوالی را x و $x+2$ در نظر می گیریم.

مجموع معکوس آنها $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2}$ و اختلاف معکوس آنها $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}$ است. داریم:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = 7 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{2x+2}{x^2+2x} = \frac{14}{x^2+2x} \xrightarrow{x \neq 0, -2} 2x+2 = 14 \Rightarrow x = 6$$

پس دو عدد ۶ و ۸ هستند.

$$\frac{m-3}{x} = \frac{x-4}{x^2+3x} \Rightarrow mx^2 + 3mx - 3x^2 - 9x = x^2 - 4x$$

$$(m-4)x^2 + (3m-5)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 & \text{غ ق} \\ x = \frac{-3m+5}{m-4} \end{cases}$$

چون دامنه معادله گویا برابر $R - \{0, -3\}$ است و از طرفی دیگر چون معادله هیچ جوابی ندارد، $x = \frac{-3m+5}{m-4}$ باید برابر -3 یا $x = 0$ باشد:

$$\frac{-3m+5}{m-4} = -3 \Rightarrow -3m+5 = -3m+12$$

$$\frac{-3m+5}{m-4} = 0 \Rightarrow -3m+5 = 0 \Rightarrow m = \frac{5}{3}$$

همچنین اگر $m-4=0$ ، یعنی $m=4$ باشد، معادله جواب حقیقی ندارد.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x-1}+2} - \frac{1}{2-\sqrt{x-1}} &= \frac{x-1}{4\sqrt{x-1}} \\ \Rightarrow \frac{2-\sqrt{x-1}-\sqrt{x-1}-2}{(\sqrt{x-1}+2)(2-\sqrt{x-1})} &= \frac{\sqrt{x-1}}{4} \\ \Rightarrow \frac{-2\sqrt{x-1}}{4-(x-1)} &= \frac{\sqrt{x-1}}{4} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x-1}=0 \Rightarrow x=1 \\ \frac{-2}{4-x+1} = \frac{1}{4} \Rightarrow -8=5-x \Rightarrow x=13 \end{cases}$$

اما $x=1$ غیرقابل قبول است زیرا ریشه مخرج است. پس معادله فقط یک جواب حقیقی دارد.

گزینه «۴»

x را با اتحاد مزدوج به صورت $(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})$ تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = 1-x \Rightarrow \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = (1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})$$

$$\Rightarrow \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} - (1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x}) = 0$$

$$\Rightarrow (1-\sqrt{x}) \left(\frac{1}{1+\sqrt{x}} - (1+\sqrt{x}) \right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-\sqrt{x}=0 \Rightarrow x=1 & \text{(ق ق)} \\ \frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1+\sqrt{x} \Rightarrow 1 = (1+\sqrt{x})^2 \Rightarrow 1+\sqrt{x} = \pm 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1+\sqrt{x}=1 \Rightarrow \sqrt{x}=0 \Rightarrow x=0 & \text{(ق ق)} \\ 1+\sqrt{x}=-1 \Rightarrow \sqrt{x}=-2 & \text{(غ ق ق)} \end{cases}$$

بنابراین معادله دارای دو ریشه $x_1=0$ و $x_2=1$ است و مجموع ریشه‌ها $x_1+x_2=1$ خواهد بود.

دشوار

تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۶۷

قبل از حل سوال حواسمان هست که $x \neq 0$ می‌باشد:

$$\frac{tx+2}{-2} = \frac{x+t-1}{x} \Rightarrow tx^2+2x = -2x-2t+2$$

$$tx^2+4x+2t-2=0$$

برای این که معادله فقط یک ریشه داشته باشد ۲ حالت داریم:

(۱) $\Delta = 0$ باشد:

$$\Delta = 4^2 - 4(t)(2t-2) = 0 \xrightarrow{\div 4} 4 - 2t^2 + 2t = 0$$

$$2t^2 - 2t - 4 = 0 \xrightarrow{\div 2} t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow (t-2)(t+1) = 0$$

$$\Rightarrow t = -1, t = 2$$

(۲) معادله ۲ ریشه دارد که یکی از آن‌ها $x=0$ است و قابل قبول نیست:

$$\xrightarrow{x=0 \text{ ریشه است}} 2t-2=0 \Rightarrow t=1$$

بنابراین مجموعه‌ی مقادیر t برابر است با: $\{-1, 1, 2\}$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۶۸

نکته: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2 \xrightarrow{\text{باید}} \frac{a}{b} = 1$

$$\frac{x^2-3x}{x+1} = 1 \Rightarrow x^2-3x = x+1 \Rightarrow x^2-4x-1=0$$

$\Delta = 20 \Rightarrow$ معادله دارای دو ریشه رادیکالی قابل قبول است $\xrightarrow{\text{جمع دو ریشه}}$

$$S = -\frac{b}{a} = 4$$

دشوار

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۶۹

$$\left(x-1+\frac{1}{x}\right)^2 + \left(x-2+\frac{1}{x}\right)^2 = 1 \xrightarrow{t=x+\frac{1}{x}} (t-1)^2 + (t-2)^2 = 1$$

$$\Rightarrow 2t^2 - 6t + 4 = 0 \Rightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{x} = 1 & \text{جواب ندارد.} \\ x + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{معادله یک جواب دارد.}$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۷۰

ابتدا محاسبه می‌کنیم که چند کیلوگرم رنگ خالص داریم:

$$\text{کیلوگرم رنگ خالص} = 7/2 = 70\% \times 4 + 11\% \times 40$$

بنابراین در $4 + 11 = 15$ کیلوگرم رنگ موجود، $7/2$ کیلوگرم رنگ خالص وجود دارد، اگر x میزان تبخیر باشد، آنگاه:

$$\frac{7/2}{15-x} = \%50 = \frac{50}{100}$$

$$\Rightarrow 720 = 750 - 50x \Rightarrow x = 0/6 \text{ کیلوگرم}$$

$$x + a = \sqrt{5x - x^2} \xrightarrow{x=4} 4 + a = \sqrt{20 - 16} = \sqrt{4} = 2$$

$$\Rightarrow a = -2$$

$$x - 2 = \sqrt{5x - x^2} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} (x - 2)^2 = 5x - x^2$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 9x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{49}}{4} \Rightarrow \begin{cases} x' = 4 & \text{ق ق} \\ x'' = \frac{1}{4} & \text{غ ق} \end{cases}$$

اگر در معادله به جای x مقدار $\frac{1}{4}$ قرار دهیم سمت چپ تساوی منفی و سمت راست، مثبت می‌شود؛ یعنی $x = \frac{1}{4}$ در معادله صدق نمی‌کند.

اگر فرض کنیم فائزه این کار را در x ساعت انجام می‌دهد، معصومه آن را در $x + 40$ ساعت انجام می‌دهد. از طرفی می‌دانیم وقتی هر دو با هم این کار را انجام می‌دهند، کار در ۱۵ ساعت انجام می‌شود. پس:

$$\frac{1}{\text{زمان فائزه}} + \frac{1}{\text{زمان معصومه}} = \frac{1}{\text{زمان هر دو با هم}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x + 40} = \frac{1}{15} \Rightarrow \frac{2x + 40}{x^2 + 40x} = \frac{1}{15}$$

$$\Rightarrow x^2 + 40x = 30x + 600$$

$$\Rightarrow x^2 + 10x - 600 = 0 \Rightarrow (x + 30)(x - 20) = 0$$

$$\begin{matrix} x > 0 \\ \longrightarrow \end{matrix} x = 20$$

پس فائزه به تنهایی این کار را در ۲۰ ساعت انجام می‌دهد.

ابتدا نامعادله را حل می‌کنیم:

$$x(x - 1) < 2(x - 1) \Rightarrow (x - 2)(x - 1) < 0 \Rightarrow 1 < x < 2$$

عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\sqrt{4x^2 - 8x + 4} - \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 2\sqrt{(x - 1)^2} - \sqrt{(x - 2)^2}$$

$$= 2|x - 1| - |x - 2| = 2(x - 1) - (-x + 2) = 2x - 2 + x - 2 = 3x - 4$$

پس $a = 3$ و $b = -4$ است و داریم: $a - b = 3 - (-4) = 7$

کل کار تکمیل پازل را ۱ واحد فرض می‌کنیم. حال اگر مدت زمانی را که در ابتدا طول می‌کشید تا نازنین، پازل را به تنهایی تکمیل کند، t در نظر بگیریم، در این صورت میزان تکمیل پازل در یک ساعت توسط نازنین و پدرام به ترتیب برابر $\frac{1}{t}$ و $\frac{1}{t+6}$ بوده است. در نتیجه بنابر فرضیات مسأله در حال حاضر، خواهیم داشت:

$$\frac{3}{t} + \frac{2}{t+6} = \frac{1}{4} \xrightarrow{t \neq 0, -6} 4t(t+6) \left(\frac{3}{t} + \frac{2}{t+6} \right) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow t^2 - 14t - 12 = 0 \Rightarrow (t-18)(t+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 18 \\ t = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{نازنین} \\ \text{پدرام} \end{cases} \Rightarrow |t_{\text{نازنین}} - t_{\text{پدرام}}| = 6$$

$$\left. \begin{aligned} \text{نازنین} : t' = \frac{t}{3} = 6 \\ \text{پدرام} : t' = \frac{t+6}{2} = 12 \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{5}{(x+4)(x-1)} - \frac{3}{(x+4)(x+1)} = \frac{m}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{5(x+1) - 3(x-1)}{(x+4)(x-1)(x+1)} = \frac{m}{x}$$

$$\frac{2x+8}{(x+4)(x-1)(x+1)} = \frac{m}{x} \Rightarrow \frac{2(x+4)}{(x+4)(x-1)(x+1)} = \frac{m}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{m}{x} \Rightarrow 2x = m(x^2-1)$$

$$\Rightarrow mx^2 - 2x - m = 0$$

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{-2}{m} = -1 \Rightarrow m = -\frac{1}{4}$$

با توجه به رادیکال‌ها، x تنها در مجموعه $(-\infty, 2] \cup \{0\}$ تعریف شده است.

$$x + \sqrt{x^2 - 2x} = \sqrt{x} \Rightarrow (\sqrt{x})^2 + \sqrt{x}\sqrt{x-2} - \sqrt{x} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{x-2} - 1) = 0 \quad \begin{cases} \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \sqrt{x} + \sqrt{x-2} = 1 \end{cases}$$

چون $x \geq 2$ ، لذا $\sqrt{x} > 1$ و چون $\sqrt{x-2} \geq 0$ بنابراین $\sqrt{x} + \sqrt{x-2} > 1$ لذا معادله $\sqrt{x} + \sqrt{x-2} = 1$ جواب ندارد.

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} 9 + \sqrt{x^3 - 2x^2 + x} = 9 \Rightarrow \sqrt{x^3 - 2x^2 + x} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x(x^2 - 2x + 1)} = 0 \Rightarrow x(x-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{هر دو در معادله اولیه صدق می‌کنند.}$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۶

گزینه درست: null

سوال ۷۸

چون $x = 0$ و $x = -1$ ریشه‌های معادله هستند، پس در معادله صدق می‌کنند.

$$\frac{ax}{2x-b} + \sqrt{x+b} = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow 0 + \sqrt{0+b} = 1 \Rightarrow \sqrt{b} = 1 \Rightarrow b = 1 \\ x = -1 \Rightarrow \frac{-a}{-2-b} + \sqrt{-1+b} = 1 \xrightarrow{b=1} \frac{-a}{-3} = 1 \\ \Rightarrow a = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + b = 4$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۷۹

اول مخرج کسر سمت چپ تساوی را گویا می‌کنیم:

$$A = \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} = \frac{(x-1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)}{x-1} = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1$$

حال براساس خواسته مسأله در دو جمله اول از $\sqrt[3]{x}$ فاکتور می‌گیریم:

$$\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x} + 1) + 1 = \sqrt[3]{x}f(x) + 1 \Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{x} + 1$$

اکنون معادله $f(x) = -1$ را حل می‌کنیم:

$$\sqrt[3]{x} + 1 = -1 \Rightarrow \sqrt[3]{x} = -2 \Rightarrow x = -8$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۸۰

$$\sqrt{5-x} - \sqrt{\sqrt{x}-1} = 0 \Rightarrow \sqrt{5-x} = \sqrt{\sqrt{x}-1}$$

دو طرف تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$5-x = \sqrt{x}-1 \Rightarrow x + \sqrt{x} - 6 = 0 \xrightarrow[\substack{\sqrt{x}=a \\ x=a^2}]{\substack{\sqrt{x}=a \\ x=a^2}} \begin{cases} a = -3 \\ a = 2 \end{cases}$$

$$a^2 + a - 6 = 0 \Rightarrow (a+3)(a-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ a = 2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{a=\sqrt{x}} \begin{cases} \sqrt{x} = -3 \\ \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$$

با توجه به این که $x = 4$ در معادله اولیه نیز صدق می‌کند، پس به عنوان جواب معادله قابل قبول می‌باشد.

۵ x در معادله صدق می‌کند، در نتیجه:

$$\frac{a-1}{6} + \frac{1}{21} = \frac{5-a}{14} \xrightarrow{\times 42} 7a - 7 + 2 = 15 - 3a \Rightarrow 10a = 20 \Rightarrow a = 2$$

$$\xrightarrow{a=2} \frac{1}{2x-4} + \frac{1}{x^2-4} = \frac{x-2}{x^2-x-6}$$

با شرط $x \neq 2, -2, 3$ و ضرب $(x-2)(x+2)(x-3)$ در طرفین داریم:

$$(x+2)(x-3) + 2(x-3) = 2(x-2)^2$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 6 + 2x - 6 = 2x^2 - 8x + 8 \Rightarrow x^2 - 9x + 20 = 0$$

$$\Rightarrow (x-4)(x-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 5 \end{cases}$$

مجموع دو رادیکال زمانی صفر می‌شود، که همزمان صفر شوند.

$$\sqrt{x+2} \Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

پس $x = -2$ باید رادیکال دوم را نیز صفر کند.

$$\sqrt{a(-2)^2 + 4} = 0 \Rightarrow 4a + 4 = 0 \Rightarrow a = -1$$

استاد به تنهایی در هر ساعت $\frac{1}{13}$ کار و دستیارش به تنهایی در هر ساعت $\frac{1}{16}$ کار را انجام می‌دهد. استاد ۴ ساعت کار می‌کند یعنی $4 \times \frac{1}{13} = \frac{4}{13}$ کار انجام می‌شود پس $\frac{2}{3}$ کار باقی‌مانده است.

x مدت زمان کار دستیار است تا کار به طور کامل تمام شود:

$$\frac{1}{16}x = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{32}{3} \text{ (ساعت)} \Rightarrow \frac{32}{3} \times 60 = 640 \text{ دقیقه}$$

با فرض $2x^2 - 4x + 2 = t$ ، داریم:

$$6x^2 - 12x + 3 = 3(\underbrace{2x^2 - 4x + 2}_t) - 3 = 3t - 3$$

معادله به شکل روبه‌رو درمی‌آید: $\sqrt{3t-3} - \sqrt{t} = 1$

$$\begin{aligned} \sqrt{3t-3} &= \sqrt{t} + 1 \xrightarrow{\text{توان } 2} 3t-3 = t+1+2\sqrt{t} \\ \Rightarrow 2t-4 &= 2\sqrt{t} \xrightarrow{\div 2} t-2 = \sqrt{t} \xrightarrow{\text{توان } 2} t^2-4t+4 = t \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (t-1)(t-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=1 \quad \square \\ t=4 \quad \square \end{cases}$$

فقط $t=4$ در معادله صدق می‌کند:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 4x + 2 = 4 &\Rightarrow 2x^2 - 4x - 2 = 0 \\ \Rightarrow P = \frac{c}{a} = \frac{-2}{2} &= -1 \end{aligned}$$

$$\sqrt{5x-2} = 1-3x \xrightarrow{\text{توان } 2} 5x-2 = (1-3x)^2$$

با شرط $5x-2 \leq 0$ به توان ۲ می‌رسد.

$$5x-2 = 1+9x^2-6x \Rightarrow 9x^2-11x+3=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{11+\sqrt{13}}{18} \\ x_2 = \frac{11-\sqrt{13}}{18} \end{cases}$$

$$\sqrt{3x-2} + 2x = 3 \Rightarrow \sqrt{3x-2} = 3-2x$$

$$\Rightarrow 3x-2 = (3-2x)^2$$

$$\Rightarrow 3x-2 = 9-12x+4x^2 \Rightarrow 4x^2-15x+11=0$$

چون جمع ضرایب معادله صفر است، پس یکی از جواب‌ها $x=1$ و جواب دیگر $x = \frac{c}{a} = \frac{11}{4}$ است. پس از قرار دادن جواب‌ها در معادله فوق و بررسی معادله، فقط جواب $x=1$ قابل قبول است.

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۸۷

گزینه «۳»

ابتدا جواب معادله اول را به دست می‌آوریم:

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+6} = 5 \Rightarrow \sqrt{x+1} = 5 - \sqrt{x+6}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} x+1 = 25 + x+6 - 10\sqrt{x+6} \Rightarrow x=3 = a$$

$$\sqrt{x+a} - x = 1 \xrightarrow{a=3} \sqrt{x+3} - x = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+3} = 1+x \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x+3 = x^2 + 2x + 1$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{ق ق } x = 1 \\ \text{غ ق } x = -2 \end{cases}$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۷

گزینه درست: null

سوال ۸۸

$$\sqrt{x^2(x^2-4)} + \sqrt{x(4-x^2)} = 0$$

مقادیری از x که هر دو رادیکال را هم‌زمان صفر کند جواب معادله است.

$$x^2(x^2-4) = 0 \Rightarrow x^2(x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها} = 0 + 2 + (-2) = 0$$

متوسط

تشریحی ۱۳۹۹

گزینه درست: null

سوال ۸۹

گزینه «۲»

توجه کنید که وقتی احمد و رضا به هم می‌رسند مدت زمان حرکت هر دو با هم مساوی است. از آن‌جا که احمد مسافتی برابر $48 = 60 - 12$ و رضا مسافتی برابر $72 = 60 + 12$ کیلومتر طی کرده است، پس زمان حرکت احمد $\frac{48}{v}$ و زمان حرکت رضا $\frac{72}{v+4}$ است که در آن سرعت حرکت احمد است.

بنابراین:

$$t = \frac{72}{v+4} = \frac{48}{v} \Rightarrow v = 8$$

پس احمد با سرعت ۸ کیلومتر بر ساعت حرکت می‌کند.

توجه می کنیم که $x \neq 2$ و $x \neq -2$ (زیرا ریشه های مخرج هستند)

با ضرب طرفین معادله در $(x-2)(x+2)$ داریم:

$$(x-2)^2 + x(x+2) = 8$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 2x + 4 = 8$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x = -1, \quad x = 2$$

$x = 2$ قابل قبول نیست، زیرا ریشه مخرج است.